# الرياضيات

الصفّ الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الأول

## كتاب الطالب


اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور



الطبعة الأولى

١٤٣٣ - ١٤٣٥ هـ

٢٠١٣ - ٢٠١٤ م

**فريق عمل دراسة و موائمة كتب الرياضيات للصف الحادي عشر علمي**

أ. حسن نوح علي المهنا ( رئيسا )

أ. حسين اليماني الشامي | أ. مصطفى محمد شعبان محمود

أ. صديقه أحمد صالح الأنصاري | أ. شيخه فلاح مبارك الحجرف

أ. منى علي عيسى المسري

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٢



٢٠١٣

الطبعة الأولى ٢٠١٢

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

# مقدمة

في ضوء ما شهدته السنوات الأخيرة من طفرة هائلة في المستحدثات التكنولوجية المرتبطة بمجال التعليم، كان على منظومة التعليم بمستوياتها وعناصرها المختلفة بدولة الكويت أن تتأثر بهذا التطور، فحرصت وزارة التربية على تطوير مناهج العلوم والرياضيات لتصبح قادرة على استيعاب المتغيرات التربوية والعلمية الحديثة.

ولما كان من الضروري أن يعايش المتعلم المعلومات المتدفقة من مصادر تعز عن الحصر، وأن يستعد لأداء دور فاعل في أي موقع من مواقع العمل الوطني، ويصنع مع أقرانه حياة الأمن والعزة والنماء، فيتحقق للوطن المكانة التي يرجوها بين دول العالم.

وكان على النظم التعليمية أن تعيد النظر في المناهج لإعداد الأبناء بالكفايات اللازمة والمهارات المتنوعة المستجيبة لكل تغيير في هذه الحياة.

عندئذ كفل المنهج الجديد تغيير دور المتعلم نتيجة لهذه المستحدثات، ليخرج من حيز المتلقي إلى دائرة المتفاعل الناشط، والمشارك في المواقف التعليمية، عندما يبحث ويقارن ويستنبط ويتعامل بنفسه مع المواد التعليمية، حتى يسهم في تحقيق الاكتفاء الذاتي لوطنه اقتصاديًّا واجتماعيًّا وثقافيًّا، وسد حاجاته من العمالة الوطنية في مختلف المجالات.

لقد أتاح المنهج الجديد للعلوم والرياضيات للمتعلم الارتباط بالبيئة من خلال طبيعة الأنشطة التعليمية، واكتساب الطلاب مهارات التعلم الذاتي وغرس حب المعرفة وتحصيلها استجابة لأهداف المنهج الرئيسية.

ولقد انتظم التغيير أهداف المنهج ومحتواه وأنشطته، وطرائق عرضها وتقديمها وأساليب تقويمها، ضمن مشروع التطوير.

# الوحدة الأولى

## الأعداد الحقيقية

## The Real Numbers

### مشروع الوحدة: معدل السرعة

1 مقدمة المشروع: شغلت حركة كواكب النظام الشمسي العلماء منذ القدم. ما هو مدار كل كوكب؟ ما كتلته؟ وفي أي اتجاه يدور؟ وما هي الشهب؟

يعتبر يوهانز كيبلر Johannes Kepler من أهم علماء الفلك وواضع ما عرف بقوانين كيبلر الثلاثة حول حركة الكواكب في 1609 و1618.

2 الهدف: التعرف على قوانين كيبلر وإجراء بعض العمليات الحسابية حول مدار كوكب، وسرعته، وزنته.

3 اللوازم: آلة حاسبة علمية، أوراق رسم بياني، حاسوب، جهاز إسقاط Data Show.

4 أسئلة حول التطبيق:

a اعرض قوانين كيبلر الثلاثة وادعم عرضك ببعض الرسوم التي تبيّن حركة الكواكب وعلاقتها بالمدار الإهليليجي (بيضاوي).

b ضع جدولًا يبيّن خصائص بعض كواكب النظام الشمسي: بُعدها عن الشمس، كتلتها، طول قطرها، الزمن المستغرق لدورانها دورة كاملة حول الشمس وحول نفسها.

c أوجد نسبة مربع الزمن لدورة الأرض دورة كاملة حول الشمس إلى مربع الزمن لدورة عطارد دورة كاملة حول الشمس، وقارنها بنسبة مكعب بُعد الأرض عن الشمس إلى مكعب بُعد عطارد عن الشمس.

d اسأل معلم مادة الجغرافيا عن حركة الكواكب وعن أبحاث كوبرنيكوس، وكيبلر، وجاليليو حول هذا الموضوع.

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن خطوات المشروع وكيف استفدت من دروس الوحدة في حساباتك. ضمّن التقرير نتائج محادثتك مع معلم مادة الجغرافيا. وادعمه بصور وملصقات أو عرض على جهاز الإسقاط Data Show.

### دروس الوحدة

| حل المعادلات | الأسس النسبية | الجذور والتعبيرات الجذرية |
|---|---|---|
| 1-3 | 1-2 | 1-1 |

# الوحدة الأولى

## أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الأعداد الحقيقية.
- تعرفت الجذر التربيعي.
- تعرفت حل المتباينات.
- استخدمت الآلة الحاسبة لإيجاد الجذور التربيعية.
- تعرفت القيمة المطلقة وحل متباينات تتضمن القيمة المطلقة.

## ماذا سوف تتعلم؟

- ضرب الجذور التربيعية والجذور التكعيبية وقسمتها.
- ضرب التعبيرات الجذرية النونية وقسمتها.
- كيفية إيجاد المرافق واستخدامه.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الأسية.
- حل معادلات جذرية.
- حل معادلات أسية.

## المصطلحات الأساسية

الجذر التربيعي – الجذر التكعيبي – الجذر النوني – المرافق – دليل الجذر – المجذور – المعادلة الجذرية – المعادلة الأسية – الصورة الجذرية – الصورة الأسية.

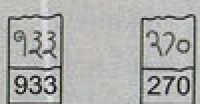
### أضف إلى معلوماتك

المعكوس الضربي لكل عدد حقيقي موجب أكبر من واحد هو عدد حقيقي موجب أصغر من واحد.

إذًا يوجد أعداد حقيقية موجبة أصغر من واحد بقدر ما يوجد أعداد حقيقية موجبة أكبر من واحد.

ظهور الصفر في الهند: في العام 876 وجدت الأرقام التالية في مغارة غواليور Gwalior (على بعد 300 km من نيودلهي) وتعود إلى القرن الخامس ويظهر فيها الصفر.


مثلًا:




انتقل هذا الترقيم إلى الغرب بواسطة الخوارزمي (بين القرنين الثامن والتاسع).

خضعت هذه الأرقام لعدة تحولات وأصبحت حاليًا:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

# 1-1

# الجذور والتعبيرات الجذرية

# Roots and Radical Expressions

سوف تتعلم
- اختصار الجذور.
- ضرب التعبيرات الجذرية.
- قسمة التعبيرات الجذرية.
- استخدام المرافق لتبسيط كسر إلى كسر مقامه عدد نسبي.

المفردات والمصطلحات:
- الجذر التربيعي Square Root
- الجذر التكعيبي Cubic Root
- التعبيرات الجذرية Radical Expressions
- دليل الجذر Radix
- المجذور Radicand
- المرافق Conjugate
- تحليل Analyse
- عوامل أولية Prime Factors

**معلومة:**

أسماء وحدات الطول

| | |
|---|---|
| millimetre | mm |
| centimetre | cm |
| decimetre | dm |
| metre | m |
| decametre | dam |
| hectometre | hm |
| kilometre | km |

**معلومة:**

عندما يكون دليل الجذر يساوي 2 فلا يكتب الدليل.

مثال: $\sqrt{x}$ تعني الجذر التربيعي لـ $x$

أي مقدار يتضمن جذورًا يسمى تعبيرًا جذريًا.

### دعنا نفكر ونتناقش

1 صالة عرض سيّارات مكعبة الشكل. إذا كان:

a طول ضلعها يساوي 12 m
فإن مساحة أحد أوجهها تساوي ....

b مساحة أحد أوجهها تساوي $100\ m^2$
فإن طول ضلعها يساوي ...

c مساحة أحد أوجهها تساوي $400\ m^2$
فإن طول ضلعها يساوي ...
(يمكن استخدام الآلة الحاسبة).

d مساحتها الكلية تساوي $384\ m^2$ فإن طول ضلعها يساوي ...

e طول ضلعها يساوي 12 m فإن حجمها يساوي ...

f حجمها يساوي $512\ m^3$ فإن طول ضلعها يساوي ...

g حجمها يساوي $970\ m^3$ فإن طول ضلعها يساوي ...

## الجذور والتعبيرات الجذرية Roots and Radical Expressions

بما أن $(5)^2 = (-5)^2 = 25$

فإن العددين 5− , 5+ هما الجذران التربيعيان للعدد 25

بما أن $(5)^3 = 125$ أن فإن العدد 5 هو الجذر التكعيبي للعدد 125

وأيضًا بما أن $(-5)^3 = -125$

فإن العدد (5−) هو الجذر التكعيبي للعدد (125−)

وبالتالي:

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.

  أي أن إذا كان $A^2 = x$ فإن $A = \pm\sqrt{x}\ ,\ x > 0$

- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي حقيقي واحد.

**ملخص عدد الجذور الحقيقية لعدد حقيقي**

| العدد الحقيقي | عدد الجذور التربيعية | عدد الجذور الحقيقية التكعيبية |
|---|---|---|
| موجب | 2 | 1 |
| صفر | 1 | 1 |
| سالب | 0 | 1 |

## الجذور التكعيبية Cubic Roots

إذا كان $B = A^3$، فإن $A = \sqrt[3]{B}$ وتقرأ **الجذر التكعيبي** للعدد $B$ حيث 3 هو **دليل الجذر**، $B$ هو **المجذور**.

$$(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**مثال (1)**

**أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلة الحاسبة:**

a $-8$ b $125$ c $-\frac{375}{24}$ d $0.064$

**الحل:**

a الجذر التكعيبي للعدد (8−) هو $\sqrt[3]{-8}$

$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3}$ حلل (8−) إلى عوامله

$= -2$ $\sqrt[3]{x^3} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b الجذر التكعيبي للعدد 125 هو $\sqrt[3]{125}$

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3}$ حلل 125 إلى عوامله الأولية

$= 5$

c $\sqrt[3]{\frac{-375}{24}} = \sqrt[3]{-\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{(5)^3}{(2)^3}} = \sqrt[3]{-\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \frac{-5}{2}$

d $\sqrt[3]{0.064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{(4)^3}{(10)^3}} = \frac{4}{10}$

**حاول أن تحل**

1 **أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلة الحاسبة:**

a $-27$ b $64$ c $-0.008$ d $\frac{343}{216}$

## تبسيط الجذور Simplifying Radicals

حتى يكون التعبير الجذري في **أبسط صورة** يجب مراعاة ما يلي:

- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر.
  فمثلًا $\sqrt{8a^6b^7}$ ليس في أبسط صورة.
- ألا يكون المقام جذرًا. مثل: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ليس في أبسط صورة.
- ألا يكون المجذور كسرًا. مثل: $\sqrt{\frac{4}{7}}$ ليس في أبسط صورة.
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن.
  مثل: $\sqrt[10]{32}$ ليس في أبسط صورة.

**معلومة:**

$a^1 = a$

$a^0 = 1 \;,\; a \neq 0$

الرمز ($\forall$) يقرأ لكل.

الرمز (:) يقرأ حيث.

الرمز ($\in$) يقرأ ينتمي إلى.

**تذكر:**

قوانين الأسس

$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in \mathbb{R},$

$a, b \neq 0$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

**معلومة:**

أسماء مجموعات الأعداد

- مجموعة الأعداد الكلية Whole Numbers رمزها $\mathbb{N}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة Integers رمزها $\mathbb{Z}$.
- مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers رمزها $\mathbb{Q}$.
- مجموعة الأعداد غير النسبية Irrational numbers رمزها $\overline{\mathbb{Q}}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية Real Numbers رمزها $\mathbb{R}$.

## مثال (2)

بسّط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية لكل عدد حقيقي $x$:

a $\sqrt{4x^6}$

b $\sqrt[3]{8x^3} + 3x$

الحل:

a $\sqrt{4x^6} = \sqrt{2^2(x^3)^2}$ — اكتب $4x^6$ على صورة مربعين

$= \sqrt{(2x^3)^2}$ — $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

$= |2x^3|$ — $\sqrt{y^2} = |y|$

$= \begin{cases} 2x^3, & x \geq 0 \\ -2x^3, & x < 0 \end{cases}$

b $\sqrt[3]{8x^3} + 3x = \sqrt[3]{2^3x^3} + 3x$ — تحليل العدد 8 إلى عوامله

$= \sqrt[3]{(2x)^3} + 3x$ — $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

$= 2x + 3x$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 5x$

### حاول أن تحل

2 بسّط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية حيث $x$، $y$ عددان حقيقيان:

a $\sqrt{9x^2y^4}$

b $\sqrt[3]{-27x^6} + 3x^2$

c $\sqrt{x^8y^6}$

## مثال (3) تطبيقات حياتية

أراد خالد أن يضع 4 درازن من البرتقال في صندوق.

يتسع الصندوق لـ 4 طبقات وتحتوي كل طبقة على 12 برتقالة، على أن تكون 3 برتقالات مقابلة لعرض الصندوق و 4 برتقالات مقابلة لطول الصندوق. وزن كل برتقالة هو بين 226 g و 255 g، إن وزن البرتقالة $w$ مرتبط بطول قطرها $d$ وفق الصيغة: $w = \frac{d^3}{2.3}$ حيث $w$ بالجرام (g)، $d$ بالسنتيمتر (cm).

a أوجد طول قطر أكبر مقطع دائري للبرتقالة.

b أوجد الأبعاد لصندوق مناسب.

الحل:

a اكتب المتباينة — $226 < w < 255$

عوّض — $226 < \frac{d^3}{2.3} < 255$

اضرب في 2.3 — $519.8 < d^3 < 586.5$

---

**تذكر:**

$\sqrt{x^2} = |x|$

$|x| = \begin{cases} x : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$

**معلومة:**

أسماء وحدات الوزن

| | |
|---|---|
| milligram | mg |
| centigram | cg |
| decigram | dg |
| gram | g |
| decagram | dag |
| hetogram | hg |
| kilogram | kg |
| ton | t |

**الربط بالحياة:**

يستخدم الجذر التكعيبي لإيجاد طول نصف قطر كرة إذا عرف حجمها.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

أوجد الجذر التكعيبي $\sqrt[3]{519.8} < \sqrt[3]{d^3} < \sqrt[3]{586.5}$

استخدم الآلة الحاسبة $8.04 < d < 8.37$

وبالتالي طول قطر أكبر مقطع دائري بين 8.04cm و 8.37cm

b عرض الصندوق: $3 \times 8.37 = 25.11\ cm$

طول الصندوق = ارتفاع الصندوق:

$4 \times 8.37 = 33.48\ cm$

**حاول أن تحل**

3 استخدم الصيغة $w = \frac{d^3}{2.3}$ لإيجاد طول قطر أكبر مقطع دائري لكل برتقالة وزنها كما يلي:

a 85 g    b 195.93 g    c 177.19 g

معلومة:

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

- $\mathbb{R}^-$ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.
- $\mathbb{R}^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

## جمع وطرح التعبيرات الجذرية Adding and Subtracting Radical Expressions

لجمع التعبيرات الجذرية وطرحها، يجب أن تكون متشابهة

يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه.

يجب وضع التعبيرات الجذرية في أبسط صورة مما يسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت متشابهة أم لا.

لاحظ أن: $5\sqrt{3}$ و $2\sqrt{3}$ تعبيران جذريان متشابهان

$8\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ تعبيران جذريان متشابهان

$\sqrt{27}$ و $\sqrt{12}$ تعبيران جذريان متشابهان. لماذا؟

في حين أن:

$\sqrt{3}$ و $3\sqrt{5}$ هما تعبيران جذريان غير متشابهين

$\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{y}$ $(x \geqslant 0 ، y \geqslant 0)$ هما تعبيران جذريان غير متشابهين

معلومة:

إذا كان $a \in \mathbb{R}^-$ ،

فإن $\sqrt{a} \notin \mathbb{R}$ فمثلًا

$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$.

معلوم

تذكر:

نتعامل مع التعبيرات الجذرية المتشابهة مثل تعاملنا مع الحدود الجبرية المتشابهة.

**مثال (4)**

أوجد الناتج في أبسط صورة

a $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$

b $2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{375}$

c $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$

d $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

الحل:

**a** $3\sqrt{32}-\sqrt{98}$

$=3\sqrt{16\times 2}-\sqrt{49\times 2}$

$=3\sqrt{4^2\times 2}-\sqrt{7^2\times 2}$ اكتب 16 , 49 على صورة مربعات كاملة

$=3\times 4\times\sqrt{2}-7\times\sqrt{2}$ $\sqrt{x^2}=x, x\geqslant 0$

$=12\sqrt{2}-7\sqrt{2}$ بسّط

$=5\sqrt{2}$

**b** $2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{375}$

$=2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{125\times 3}$

$=2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{5^3\times 3}$ اكتب 125 على صورة مكعب كامل

$=2\sqrt[3]{3}+5\times 5\times\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{x^3}=x$

$=2\sqrt[3]{3}+25\sqrt[3]{3}$ بسّط

$=27\sqrt[3]{3}$

**c** $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$

$=\sqrt{9\times 2}+\sqrt{25\times 2}-\sqrt{36\times 2}$

$=\sqrt{3^2\times 2}+\sqrt{5^2\times 2}-\sqrt{6^2\times 2}$ اكتب 9 , 25 , 16 على صورة مربعات كاملة

$=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}$ $\sqrt{x^2}=x, x\geqslant 0$

$=2\sqrt{2}$ بسّط

**d** $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}$

$=\sqrt[3]{64\times 2}+\sqrt[3]{27\times 2}-2\sqrt[3]{125\times 2}$

$=\sqrt[3]{4^3\times 2}+\sqrt[3]{3^3\times 2}-2\sqrt[3]{5^3\times 2}$ اكتب 64 , 27 , 125 على صورة مكعبات كاملة

$=4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-2\times 5\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{x^3}=x, x\geqslant 0$

$=4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}$

$=-3\sqrt[3]{2}$ بسّط

**حاول أن تحل**

**4** أوجد الناتج في أبسط صورة:

**a** $4\sqrt[3]{8}+2\sqrt[3]{128}$

**b** $2\sqrt{75}-\sqrt{48}$

**c** $\sqrt{12}+\sqrt{147}-\sqrt{27}$

**d** $\sqrt[3]{320}+\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{135}$

## ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

| الجذور التربيعية | الجذور التكعيبية |
|---|---|
| $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ | $\forall x, y \in \mathbb{R}$ |
| $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = x$ | $\sqrt[3]{x^3} = x$ |
| $(\sqrt{x})^2 = x$ | $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ |
| $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ | $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ |
| $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\ ,\ y \neq 0$ | $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}\ ,\ y \neq 0$ |

فمثلًا:

$$\sqrt{12} = \sqrt{(4)(3)} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{-2}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt{0.49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10} = 0.7$$

**مثال (5)**

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

**a** $\sqrt{72x^3}\ ,\quad x \geq 0$

**b** $\sqrt[3]{80n^5}$

**الحل:**

**a** $\sqrt{72x^3} = \sqrt{(6^2)(2)(x^2)(x)}$ — حلل 72، $x^3$

$= \sqrt{6^2x^2} \times \sqrt{2x}$ — $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, x \geq 0, y \geq 0$

$= 6\lvert x \rvert \times \sqrt{2x}$ — $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$= 6x\sqrt{2x}$ — $\lvert x \rvert = x, \ x \geq 0$

**b** $\sqrt[3]{80n^5} = \sqrt[3]{2^3(10)(n^3)(n^2)}$ — تحليل $n^5$ و 80 إلى مكعبات كاملة

$= \sqrt[3]{2^3n^3} \times \sqrt[3]{10n^2}$ — $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

$= 2n\sqrt[3]{10n^2}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

حاول أن تحل

5 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{50x^4}$

b $\sqrt[3]{18x^3}$

مثال (6)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x} \quad , \quad x \geq 0$

b $\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3}$

الحل:

a $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x} = \sqrt{5(40)(x^3)(x)}$ — $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}\,, x \geq 0, y \geq 0$

$= \sqrt{200x^4}$ — اضرب

$= 10x^2\sqrt{2}$ — بسّط

b $\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3} = \sqrt[3]{(5x^3y^4) \times (64x^2y^3)}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$= \sqrt[3]{(5x^3\,y^3y)(4^3)(x^2)(y^3)}$ — حلل إلى مكعبات كاملة

$= \sqrt[3]{5(4^3) \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y}$ — خاصية التجميع

$= \sqrt[3]{4^3x^3(y^2)^3} \times \sqrt[3]{5x^2y}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$= 4xy^2\sqrt[3]{5x^2y}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

حاول أن تحل

6 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3y^2} \quad , \quad x \geq 0$

b $4\sqrt[3]{x^4y} \times 3\sqrt[3]{x^2y}$

## مثال (7)

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\frac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}}, \quad x \neq 0$

b $\frac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}}, \; x \neq 0, \; y \neq 0$

الحل:

a $\frac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}} = \sqrt[3]{\frac{162x^5}{3x^2}}$ — $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, \; y \neq 0$

$= \sqrt[3]{54x^3}$ — اقسم

$= \sqrt[3]{2(3)^3x^3}$ — حلل 54 إلى عوامله

$= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3 \times x^3}$ — $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

$= 3x\sqrt[3]{2}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

b $\frac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}} = \sqrt[3]{\frac{250x^7y^3}{2x^2y}} = \sqrt[3]{125x^5y^2}$ — $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}, \; y \neq 0$

$= \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{x^5y^2}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$= 5 \times x\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{y^2}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 5x\sqrt[3]{x^2y^2}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

### حاول أن تحل

7 أوجد ناتج كل من التعبيرات التالية:

a $\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$

b $\frac{\sqrt{12x^4}}{\sqrt{3x}}, \; x > 0$

c $\frac{\sqrt[3]{128x^{15}}}{\sqrt[3]{2x^2}}, \; x \neq 0$

## تبسيط كسر مقامه يتضمن جذرًا

**إذا كان $y$ ,$x$ تعبيرين جذريين يمثلان أعدادًا غير نسبية وكان ناتج ضرب $x$ في $y$ عددًا نسبيًا فإن $y$ ,$x$ مترافقان.**

فمثلًا: $\sqrt{2}$ مرافق $\sqrt{2}$، لأن: $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ حيث الناتج 2 عددًا نسبيًا.

وكذلك $(3+\sqrt{2})$ مرافق $(3-\sqrt{2})$، لأن: $7 = 2 - 9 = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$ حيث الناتج 7 عددًا نسبيًا.

وأيضًا $\sqrt[3]{5^2}$ مرافق لِـ $\sqrt[3]{5}$ لأنَّ: $5 = \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2}$ حيث الناتج 5 عددًا نسبيًا.

يمكن إعادة كتابة كسر يحتوي مقامه على جذور تربيعية أو جذور تكعيبية على شكل كسر مقامه عدد نسبي وذلك بضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام.

أنزل سطر

**معلومة:**

إذا كان $a, b$ عددين صحيحين موجبين فإن:

$\sqrt{a}$ هو مرافق $\sqrt{a}$.

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})$،$(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ مترافقان.

**معلومة:**

المرافق ليس وحيد.

## مثال (8)

اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:

**a** $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **b** $\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$ **c** $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ **d** $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}, x > 1, x \in Q$

خطأ مطبعي

**الحل:**

**a** $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$ اضرب بسط الكسر ومقامه في $\sqrt{3}$ وهو مرافق المقام $\sqrt{3}$

$= \frac{\sqrt{3} + (\sqrt{2} \times \sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2}$ اضرب

$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$ بسّط

$\therefore \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$ المقام عدد نسبيّ

**b** $\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}} \times \left(\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)$ اضرب بسط الكسر ومقامه في $3+\sqrt{2}$ وهو مرافق المقام $3-\sqrt{2}$

$= \frac{3\sqrt{2} + (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) - 3 - \sqrt{2}}{3^2 - (\sqrt{2})^2}$ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$= \frac{3\sqrt{2} + 2 - 3 - \sqrt{2}}{9-2}$ بسّط

$= \frac{2\sqrt{2}-1}{7}$ بسّط

**c** $\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في $\sqrt[3]{5^2}$ وهو مرافق المقام $\sqrt[3]{5}$

$= \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}$ $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$= \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$ $\sqrt[3]{x^3} = x$ وبالتالي المقام عدد نسبيّ

**d** $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x} = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x} \times \frac{\sqrt{x}+9x}{\sqrt{x}+9x}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$= \frac{x\sqrt{x} + 9x^2 + (\sqrt{x})^2 + 9x\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2 - (9x)^2}$ اضرب

$= \frac{x\sqrt{x} + 9x^2 + x + 9x\sqrt{x}}{x - 81x^2}$ بسّط

$= \frac{9x^2 + 10x\sqrt{x} + x}{x - 81x^2}$

$= \dfrac{x(9x+10\sqrt{x}+1)}{x(1-81x)}$ , $x > 1$ — $x$ عامل مشترك

$= \dfrac{9x+10\sqrt{x}+1}{1-81x}$ — بسّط

**حاول أن تحل**

**8** أوجد ناتج كل من التعبيرات التالية في أبسط صورة:

a $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ b $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ c $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$ d $\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $x>1$ , $x \in Q$

**مثال (9)**

## تطبيقات حياتية

ينص قانون كيبلر الثالث على أن مربع الزمن الدوري ($T^2$) لدوران كوكب حول الشمس يتناسب طردًا مع مكعب نصف طول المحور الأكبر لمدار الكوكب ($r^3$) ويمكن تمثيل ذلك بالعلاقة:

$T^2 = \dfrac{4\pi^2}{(6.673)\times(10^{-11})\times M} \times r^3$، حيث $M$ بالكيلوجرام، $r$ بالمتر، $T$ بالثانية.

أوجد نصف طول المحور الأكبر لمدار كوكب كتلته: $M=6\times10^{24}$ kg

وزمنه الدوري: $T = 5\ 175\ s$.


**الحل:**

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{(6.673)(10^{-11})\times M} \times r^3$$

$$r^3 = \frac{M \times (6.673)(10^{-11}) \times T^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{M \times (6.673)\times(10^{-11})\times T^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{(6\times10^{24})(6.673\times10^{-11})(5175)^2}{4\pi^2}}$$

$$\approx 6.476\times10^{6}\ \text{m}$$

يبلغ نصف طول المحور الأكبر لمدار الكوكب حوالي $6.476\times10^{6}$ m

**حاول أن تحل**

**9** باستخدام العلاقة في مثال (9) أوجد الزمن الدوري إذا كان نصف طول المحور الأكبر لمدار كوكب $5.84\times10^{5}$ m، وكتلته $5.4\times10^{21}$ kg

**معلومة:**

كيبلر عالم رياضيات وفلك وفيزياء ألماني، وضع قوانينًا تصف حركة دوران الكوكب حول الشمس.

من قوانينه:

كل كوكب يدور في مدار إهليليجي (بيضاوي) حول الشمس وتقع الشمس في إحدى بؤرتيه ويسمى هذا المدار بالقطع الناقص.

# 1-2

# الأسس النسبية

## Rational Exponents

سوف تتعلم

- كتابة عدد حقيقي في الصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي في الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الأسية إلى الصورة الجذرية.
- الجذر النوني للعدد.
- خواص الجذور النونية.
- ضرب الجذور النونية وقسمتها.

المفردات والمصطلحات:

- الصورة الجذرية Radical Form
- الصورة الأسية Exponential Form
- الجذر النوني $n^{th}$ Root

### دعنا نفكر ونتناقش

يقدّر علماء الآثار عمر المحفورات باستخدام الأسس النسبية

عرفت سابقًا أن: $x^3 \cdot x^3 = x^6$

ومنه استنتجنا أن $x^3$ هو جذر تربيعي لِـ $x^6$

كذلك $x^2 \cdot x^2 = x^4$ $\quad \therefore$ $x^2$ جذر تربيعي لِـ $x^4$

$x^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-2}\ ,\ x \neq 0$

$\therefore$ $x^{-1}$ جذر تربيعي لِـ $x^{-2}$

الجذر التربيعي الأساسي للعدد الموجب $x$ هو $\sqrt{x}$

ونكتب: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

إذا حاولنا كتابة هذه المعادلة بالصيغة الأسية،

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$

$x^{\square} \cdot x^{\square} = x^1 = x$

بالمقارنة مع ما ورد أعلاه نستطيع أن نكتب: $\square + \square = 1$

$\therefore \ \square = \frac{1}{2}$.

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ تكتب $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$

وقد اعتمدت الصيغة الأسية وعممت لكتابة أي تعبير جذري.

يمكنك كتابة أي تعبير جذري باستخدام الأس النسبي.

في الصورة الجذرية يعبر دليل الجذر عن الجذر الذي تريده، وفي الصورة الأسية يصبح دليل الجذر مقامًا للأس كما هو مبين في الجدول التالي:

| الصورة الأسية | الصورة الجذرية |
|---|---|
| $25^{\frac{1}{2}}$ | $\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$ |
| $27^{\frac{1}{3}}$ | $\sqrt[3]{27}$ |
| $64^{\frac{1}{4}}$ | $\sqrt[4]{64}$ |

**معلومة:**

يعتبر عالما الرياضيات واليس WALLIS، وديكارت DESCARTES أول من استخدم الأسس النسبية.

ويمكن استخدام خواص الأسس لتبسيط التعبيرات الجذرية.

**معلومة:**

يرمز المفتاح ^ في بعض الآلات الحاسبة إلى الأس. وفي حالة الأسس النسبية يكتب الأس بين قوسين. فمثلًا: $432^{\frac{3}{5}}$ يتم إدخالها إلى الآلة الحاسبة كما يلي:

432 ^ (3 ÷ 5)

**مثال (1)**

بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

(a) $125^{\frac{1}{3}}$ (b) $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$ (c) $10^{\frac{1}{3}} \times 100^{\frac{1}{3}}$

**الحل:**

اكتب $125^{\frac{1}{3}}$ بالصورة الجذرية

حلل 125 إلى عوامله الأولية

$\sqrt[3]{x^3} = x$

**a** $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125}$

$= \sqrt[3]{5^3}$

$= 5$

$\therefore\ 125^{\frac{1}{3}} = 5$

اكتب $5^{\frac{1}{2}}$ بالصورة الجذرية

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x, \quad x \geq 0$

**b** $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \times \sqrt{5}$

$= 5$

$\therefore\ 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5$

اكتب $10^{\frac{1}{3}}$ و $100^{\frac{1}{3}}$ بالصورة الجذرية

$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

$\sqrt[3]{x^3} = x$

**c** $10^{\frac{1}{3}}(100^{\frac{1}{3}}) = (\sqrt[3]{10})(\sqrt[3]{100})$

$= \sqrt[3]{(10)(100)}$

$= \sqrt[3]{10^3}$

$= 10$

$\therefore\ 10^{\frac{1}{3}}(100^{\frac{1}{3}}) = 10$

**حاول أن تحل**

**1** بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

**a** $64^{\frac{1}{3}}$ **b** $(2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$ **c** $(8^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$

يمكن أن يكون بسط الأس النسبي عددًا غير الواحد. الخاصية $(x^m)^n = x^{n \cdot m}$ تبين كيف يمكن إعادة كتابة أي تعبير بحيث يكون الأس كسرًا.

## مثال (2)

اكتب العدد $25^{\frac{3}{2}}$ بالصورة الجذرية.

**الحل:**

$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot m$

$x^{mn} = (x^m)^n$

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x},\ x > 0$

$25^{\frac{3}{2}} = 25^{3 \times \frac{1}{2}} = (25^3)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{25^3}$

$\therefore\ 25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3}$

**حاول أن تحل**

**2** اكتب العدد $64^{\frac{4}{3}}$ بالصورة الجذرية.

إذا كان $a$ عددًا حقيقيًا، $n \geq 2$ , $n \in \mathbb{Z}^+$:

فإن الجذر النوني للعدد $a$ يرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ ويساوي عددًا حقيقيًا $b$ حيث $a = b^n$

دليل الجذر ⟵ $\sqrt[n]{x}$ ⟵ المجذور

إذا كان الجذر النوني لعدد $x$ هو عددًا حقيقيًا، $m$ عددًا صحيحًا، $n$ عددًا طبيعيًا $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن:

1. $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
2. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$
3. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \\ x & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \end{cases}$

## مثال (3)

a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من: 1 $x^{\frac{2}{5}}$ 2 $y^{-2.5}, \forall y > 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من: 1 $(\sqrt[5]{y})^2$ 2 $\sqrt{b^3}, \quad \forall b \geq 0$

**الحل:**

a 1 $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2} = (\sqrt[5]{x})^2$ — $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

2 $y^{-2.5} = y^{-\frac{5}{2}}$ — حول 2.5 إلى كسر مركب

$= \frac{1}{y^{\frac{5}{2}}}$ — $x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \ x \neq 0$

$= \frac{1}{\sqrt{y^5}} \quad , \ \forall y > 0$ — $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$\therefore \ y^{-2.5} = \frac{1}{\sqrt{y^5}} \quad , \ \forall y > 0$

b 1 $(\sqrt[5]{y})^2 = \sqrt[5]{y^2}$ — $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$

$= y^{\frac{2}{5}}$ — $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$\therefore \ (\sqrt[5]{y})^2 = y^{\frac{2}{5}}$

2 $\sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \ \sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}} \quad , \ b \geq 0$

## حاول أن تحل

3 a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من: 1 $x^{0.4}$ 2 $y^{\frac{3}{8}}, \forall y \geq 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من: 1 $\sqrt[3]{x^2}$ 2 $(\sqrt{y})^3, \forall y \geq 0$

## مثال (4)

إن عدم شعور رائد الفضاء بانعدام التوازن في رحلة فضائية يعود إلى دوران جهاز يجلس فيه ويشعره بجاذبية وهمية تحاكي الجاذبية الأرضية.

يدور الجهاز وفق المعادلة الرياضية: $n = \dfrac{g^{0.5}}{2 \cdot \pi \cdot r^{0.5}}$

حيث $n$ هي السرعة الدورانية وتقاس بالدورة في الثانية(s).

$r$ هو طول نصف قطر جهاز الدوران ويقاس بالمتر (m).

$g$ هي الجاذبية الوهمية التي تحاكي الجاذبية الأرضية.

احسب سرعة دوران جهاز، طول نصف قطره 1.7 m يدور ليحاكي الجاذبية الأرضية التي تساوي $9.8\ m/s^2$

**الحل:**

اكتب المعادلة $n = \dfrac{g^{0.5}}{2 \cdot \pi \cdot r^{0.5}}$

عوض $\approx \dfrac{9.8^{0.5}}{2(3.14)(1.7)^{0.5}}$

استخدم الآلة الحاسبة $n \approx 0.382$

تبلغ سرعة دوران الجهاز حوالي 0.382 دورة في الثانية.

### حاول أن تحل

**4** احسب السرعة الدورانية المطلوبة للجهاز في المثال (4) ليحاكي جاذبية تحاكي نصف مقدار الجاذبية الأرضية.

**الربط بالحياة:**

نيل آرمسترونغ

Neil Armstrong

(1930 – 2012)

هو أول رائد فضاء وطأت قدماه سطح القمر.

- قاد سنة 1966 المركبة Gemini 8 وقام مع زميله ديفيد سكوت بإجراء أول عملية التحام بين مركبتين في الفضاء بواسطة إنسان.
- سنة 1969 قاد المركبة Apollo 11 برفقة بن آلدرن ومايكل كولينز. هبط آرمسترونغ مع آلدرن على سطح القمر حيث أمضيا 2h31min.

## قوانين الأسس النسبية Laws of Rational Exponents

ليكن $n$ , $m$ عددين نسبيين، $a$ , $b$ عددين حقيقيين حيث $b^m$ , $b^n$ , $a^m$ , $a^n$ أعدادًا حقيقية.

| القانون | المثال |
|---|---|
| $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ | $8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$ |
| $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$ | $(5^{\frac{1}{2}})^4 = 5^{\frac{1}{2} \times 4} = 5^2 = 25$ |
| $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ | $(4 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}}$ |
| $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}, b \neq 0$ | $9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{3}$ |
| $\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}, b \neq 0$ | $\dfrac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$ |
| $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, b \neq 0$ | $\left(\dfrac{-125}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{-125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{-5}{3}$ |

يمكنك تبسيط أي عدد أسه عدد نسبي باستخدام قوانين الأسس النسبية أو بتحويله إلى تعبير جذري.

**مثال (5)**

**بسّط كلًّا مما يلي مستخدمًا قوانين الأسس:**

a $(-32)^{\frac{3}{5}}$

b $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}, \quad x > 0$

**الحل:**

a $(-32)^{\frac{3}{5}} = (-2^5)^{\frac{3}{5}}$ — $2^5 = 32$

$= (-2)^{\frac{15}{5}}$ — $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$

$= (-2)^3$ — بسّط

$= -8$

b $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$

$= \left(x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}}$ — الخاصيّة

$= \left(x^{\frac{8}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}}$ — بسّط $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$

$= x^{\frac{8}{6}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}$

**حاول أن تحل**

5 **بسّط كلًّا من الأعداد التالية مستخدمًا قوانين الأسس:**

a $25^{-\frac{3}{2}}$

b $(-32)^{\frac{4}{5}}$

c $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \geq 0, \quad y > 0$

لضرب أو لقسمة $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ يمكن استخدام الصورة الأسية لكل منهما وتطبيق قوانين الأسس أو تطبيق قوانين الجذور النونية.

**قوانين الجذور النونية**

**إذا كان: $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ عددين حقيقيين، فإن:**

1 $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

2 $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad , \quad y \neq 0$

3 $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$

## مثال (6)

بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7}$

b $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

c $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

d $\left[\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1}$ $x, y \in Q^+$

**الحل:**

**طريقة أولى**

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{5 \times 7}$ — $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$= \sqrt[4]{35}$ — اضرب

$\therefore \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{35}$

**طريقة ثانية**

$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = 5^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}}$ — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= (5 \times 7)^{\frac{1}{4}}$ — $x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$

$= (35)^{\frac{1}{4}}$ — اضرب

$= \sqrt[4]{35}$ — $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

**طريقة أولى**

b $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}}$ — $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} \, (y \neq 0)$

$= \sqrt[3]{8}$ — اقسم

$= \sqrt[3]{2^3}$ — حلل 8 إلى عوامله

$= 2$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = 2$

**طريقة ثانية**

$\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$ — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ — $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n, \; y \neq 0$

$= 8^{\frac{1}{3}}$ — اقسم

$= \sqrt[3]{8}$ — $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

$= 2$ — بسّط

**طريقة أولى**

c) $\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt{(256)^{\frac{1}{4}}}$ — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left((256)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$ — $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

$= 256^{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}$ — $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

$= 256^{\frac{1}{8}}$ — اضرب

$= (2^8)^{\frac{1}{8}}$ — حلل 256 إلى عوامله

$= 2$ — $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

$m \cdot n$

**طريقة ثانية**

$\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[2\times4]{256}$ — $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$

$= \sqrt[8]{2^8}$ — حلل 256 إلى عوامله الأولية

$= 2$ — ($n$ عدد زوجي) $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

$\therefore \sqrt{\sqrt[4]{256}} = 2$

d) $\left(\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \left(\left((x^3y^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left(\left(\left((xy)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ — الخاصية: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$= \left(\left((xy)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ — الخاصية: $(b^n)^m = b^{n \cdot m}$

$= \left((xy)^{\frac{1\times3}{3\times2}}\right)^{-1}$

$= \left((xy)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ — بسّط

$= (xy)^{-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

$= \dfrac{\sqrt{xy}}{xy}$ — ضرب البسط والمقام بمرافق المقام

**حاول أن تحل**

**6** بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية:

a) $\sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{27}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

d) $\left(\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{y^3}\right)^{-12},\ x, y \in Q^+$

## مثال (7)

تعطى قوة الجاذبية بين جسمين بالعلاقة:

$g = 6.67 \times (10)^{-11} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{d^2}$ حيث: $k_1$، $k_2$ كتلتي الجسمين بالكيلوغرام (kg)، $d$ المسافة بين الجسمين بالمتر (m)، g قوة الجاذبية بالنيوتن (N).

أوجد المسافة بين الأرض والقمر إذا كانت كتلة الأرض تساوي تقريبًا $5.98 \times 10^{24}$kg ، كتلة القمر تساوي 1.23% من كتلة الأرض وقوة الجاذبية بينهما هي $183 \times 10^{19}$ N تقريبًا.

الحل:

$$k_1 = (5.98)(10^{24})\text{kg} \quad , \quad k_2 = (1.23\%)(5.98)(10^{24})\text{kg}$$

$$g = (6.67)(10)^{-11} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{d^2}$$

$$\therefore \ d^2 = (6.67)(10)^{-11} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{g}$$

$$d = \sqrt{\frac{(6.67)(10)^{-11} \cdot k_1 \cdot k_2}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{(6.67)(10)^{-11}(5.98)(10^{24})(0.0123)(5.98)(10^{24})}{183 \times 10^{19}}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(6.67)(5.98)^2(0.0123)(10^{18})}{183}}$$

$$\approx 126\,616\,735.4 \text{ m}$$

تبلغ المسافة بين الأرض والقمر 126 616 735.4 m تقريبًا.

### حاول أن تحل

7 باستخدام العلاقة من مثال (7) أوجد المسافة بين الأرض والشمس إذا كانت كتلة الشمس تساوي $(2)(10^{30})$kg تقريبًا. وقوة الجاذبية بينهما $(53.2)(10^{23})$N

# 1-3

## حل المعادلات

## Solving Equations

**سوف تتعلم**
- حل معادلات جذرية.
- حل معادلات أسية.

**المفردات والمصطلحات:**
- معادلة جذرية
Radical Equation
- معادلة أسية
Exponential Equation
- كثيرة حدود من الدرجة الثانية
Quadratic Polynomial

**دعنا نفكر ونتناقش**

1 ليكن: $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

a احسب: $(2 + \sqrt{3})^2$

b استنتج قيمة مبسطة لِـ $a$

c أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

2 مستعينًا بما قمت به في الفقرة 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $y^2 = 7 - 4\sqrt{3}$

3 a احسب $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$.

b حل المعادلة: $x^2 = 12 - 2\sqrt{35}$

### أولًا: المعادلات الجذرية Radical Equations

المعادلة الجذرية هي معادلة يكون أس المتغير فيها عددًا نسبيًا (ليس عددًا صحيحًا) أو يتضمن المجذور متغيرًا.

فمثلًا:

معادلة جذرية $3 + \sqrt{x} = 10$

معادلة جذرية $(x-2)^{\frac{1}{2}} = 1$

ليست معادلة جذرية $\sqrt{3} + x = 1$

**تعلم**

**لحل معادلة جذرية اتبع الخطوات التالية:**

**الخطوة الأولى: أفصل الجذر إلى أحد طرفي المعادلة.**

**الخطوة الثانية: حدد شرط الحل**

**– إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا فإن قيمة ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر وكلًا من طرفي المعادلة أكبر من أو يساوي الصفر أيضًا.**

**– إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًا فإن قيمة ما تحت الجذر ينتمي إلى $\mathbb{R}$.**

**الخطوة الثالثة: ارفع طرفي المعادلة إلى أس مناسب يحذف الجذر.**

**الخطوة الرابعة: تأكد من أن الحل يحقق الشرط.**

**معلومة مفيدة:**

الرمز $\Leftarrow$ يقرأ يؤدي إلى.

## مثال (1)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: ⓐ $2+\sqrt{3x-2}=6$ ⓑ $6+\sqrt{x-1}=3$

**الحل:**

ⓐ أفصل الجذر

$$2+\sqrt{3x-2}=6$$

$$\sqrt{3x-2}=4$$

$\because$ دليل الجذر عددًا زوجيًا في $\sqrt{3x-2}$

حدّد شرط الحل

$$\therefore\ 3x-2\geq 0$$

$$3x\geq 2 \Rightarrow x\geqslant \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ x\in \frac{2}{3},\infty)$$

ارفع إلى القوة 2 طرفي المعادلة

$$(\sqrt{3x-2})^2=4^2$$

$(\sqrt{x})^2=x$

$$3x-2=16$$

بسّط

$$x=6$$

تأكد من تحقق الشرط

$$\because\ 6\in \frac{2}{3},+\infty)$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{6\}$

ⓑ أفصل الجذر

$$6+\sqrt{x-1}=3$$

$$\sqrt{x-1}=-3$$

مجموعة الحل $=\phi$ لأن $\sqrt{x-1}$ موجب، $-3$ سالب.

### حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: ⓐ $\sqrt{5x+4}-7=0$ ⓑ $\sqrt{x-2}+9=0$

لاحظ أن إيجاد شرط الحل يحدّد مجموعة التعويض والتي تشمل جميع القيم التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة (صحيحة أو خاطئة) ومجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض وهي تشمل جميع القيم التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة صحيحة.

يمكن حل معادلة على صورة $x^{\frac{m}{n}}=b$ برفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{n}{m}$، المعكوس الضربي لِ $\frac{m}{n}$

إذا كان $m$ عددًا زوجيًا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}}=|x|$

إذا كان $m$ عددًا فرديًا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}}=x$

ملاحظة: مقام الأس النسبي هو دليل الجذر.

## مثال (2)

أوجد مجموعة الحل: $2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$

**الحل:**

$$2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$$

اقسم

$$(x-2)^{\frac{2}{3}} = 25$$

ارفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{3}{2}$

$$\left((x-2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 25^{\frac{3}{2}}$$

$|x| = (x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}}$ إذا كان $m$ عددًا زوجيًا

$$|x-2| = \sqrt{25^3}$$

$$|x-2| = \sqrt{5^6} = 125$$

$|x| = b \Rightarrow (x = b$ أو $x = -b)$

$\therefore\ x-2 = 125$ أو $x-2 = -125$

$x = 127$ أو $x = -123$

مجموعة الحل $= \{-123, 127\}$

## حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة الحل:

a $2(x+3)^{\frac{3}{2}} = 54$

b $(1-x)^{\frac{2}{5}} - 4 = 0$

يمكن الحصول على حلول دخيلة (لا تحقق الشرط) عند رفع طرفي المعادلة إلى قوة ما.

## مثال (3)

أوجد مجموعة الحل: $5 + \sqrt{x-3} = x$

**الحل:**

أفصل الجذر

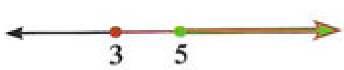
$$\sqrt{x-3} + 5 = x$$

$$\sqrt{x-3} = x - 5$$

تكون قيمة $x$ مقبولة إذا حققت:

$x - 3 \geq 0\ ,\ \ x - 5 \geq 0$

$x \geq 3\ ,\ \ x \geq 5$




$\therefore\ x \geq 5$

$\therefore\ x \in [5, \infty)$

رفع طرفي المعادلة إلى القوة 2 $\quad (\sqrt{x-3})^2 = (x-5)^2$

$x = (\sqrt{x})^2$ إذا كان $0 \le x$ $\quad x - 3 = (x-5)^2$

فك $\quad x - 3 = x^2 - 10x + 25x$

بسّط $\quad x^2 - 11x + 28 = 0$

حلّل $\quad (x-4)(x-7) = 0$

$0 = a \cdot b$ مكافئ لـ $a = 0$ أو $b = 0$ $\quad x - 4 = 0$ أو $x - 7 = 0$

$x = 4$ أو $x = 7$

$4 \notin [5, \infty),\ 7 \in [5, \infty)$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{7\}$

**ملاحظة:**

$x = 4$ هو حل دخيل (لا يحقق الشرط).

## حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة الحل: $\quad \sqrt{5x-1} + 3 = x$

في بعض الحالات تحتوي المعادلة على جذرين، فيتم فصلهما بحيث يحتوي كل طرف في المعادلة على جذر.

## مثال (4)

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة: **(a)** $\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$ **(b)** $\sqrt{x} + \sqrt{2x-4} = 0$

**الحل:**

**(a)**

اكتب المعادلة $\quad \sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$

أفصل كل جذر $\quad \sqrt{8x} = 2\sqrt{4x-16}$

تكون قيمة $x$ مقبولة إذا حققت: $\quad 4x - 16 \ge 0\ ,\ 8x \ge 0$

أي $\quad x \ge 4\ ,\ x \ge 0$


$\therefore\ x \ge 4$

$\therefore\ x \in [4, \infty)$

ربّع طرفي المعادلة $\quad (\sqrt{8x})^2 = (2\sqrt{4x-16})^2$

$(\sqrt{x})^2 = x,\ x \ge 0$ $\quad 8x = 4(4x-16)$

اقسم على 4 $\quad 2x = 4x - 16$

$2x = 16 \Rightarrow x = 8$

$8 \in [4, \infty)$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{8\}$

**(b)** $\because\ \sqrt{2x-4} \ge 0, \sqrt{x} \ge 0$

$\therefore$ الطرف الأيسر يساوي صفرًا عندما يكون: $\quad \sqrt{x} = 0, \sqrt{2x-4} = 0$

ولكن: $\quad x = 0 \quad , \quad \sqrt{x} = 0$

$$\sqrt{2x-4}=0 \quad , \quad 2x-4=0$$

ومنه $x=2$

أي لا توجد قيمة للمتغير $x$ تجعل الطرف الأيسر للمعادلة صفرًا.

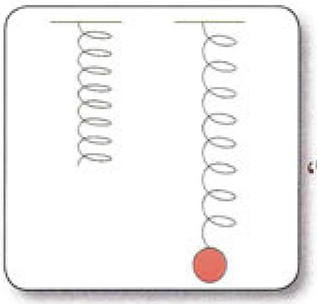
$\therefore$ مجموعة الحل $=\phi$

**حاول أن تحل**

**4** أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:

**a** $\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$

**b** $\sqrt{x-7}+\sqrt{3x-21}=0$



**مثال (5)**

تعطى العلاقة بين دورة نابض مرن (زنبرك) مهتز وكتلة الجسم المعلّق به بالمعادلة: $f=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$، حيث $f$: الدورة بالثواني(s)، $m$ الكتلة بالكيلوجرام (kg)، $c=20$ (ثابت).

أوجد كتلة جسم معلق بنابض دورته $f=4s$

**الحل:**

$$f=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{c}}=\frac{f}{2\pi}$$

عوّض

$$\sqrt{\frac{m}{20}}=\frac{4}{2\pi}$$

مربّع طرفي المعادلة

$$\frac{m}{20}=\frac{16}{4\pi^2}$$

استخدم الآلة الحاسبة

$$m\approx 8.1$$

تبلغ كتلة الجسم المعلق 8.1kg تقريبًا.

**حاول أن تحل**

**5** تعطى العلاقة بين طول نابض مرن (زنبرك) ودورته بالمعادلة: $f=2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$، حيث $f$ دورة النابض بالثواني (s)، $l$ طول النابض بالمتر (m).

أوجد طول نابض ساعة دورته 2 s.

## ثانيًا: المعادلات الأسية Exponential Equations

المعادلات: $2^x=32\ ,\ (-3)^x=-243\ ,\ \left(\frac{1}{2}\right)^y=5$

تسمى معادلات أسية.

لحل معادلة أسية يمكن استخدام الخاصية التالية:

> ليكن $a$ عدد حقيقي حيث $a\notin\{-1,0,1\}$
>
> $m$، $n$ عددان صحيحان
>
> إذا كان $a^m=a^n$، فإن $m=n$

**الربط بالحياة:**

تستخدم المعادلات الأسية في العلوم الطبية فعند حقن مريض بمادة مشعة تحسب الكمية المتبقية في الجسم من هذه الجرعة بعد فترة زمنية بمعادلة أسية.

فمثلًا:

تنمذج الكمية المتبقية بعد $t$ ساعة من حقنة هيبارين المضادة للتجلط بالمعادلة $y=0.63^t$

تم استثناء الحالات التي يكون فيها $a$ مساويًا لأي من الأعداد $-1$، $0$، $1$.

إليك أمثلة توضيحية لهذه الاستثناءات.

$1^{18} = 1^{17}$ ولكن $17 \neq 18$

$(-1)^{3} = (-1)^{13}$ ولكن $3 \neq 13$

$0^{3} = 0^{4}$ ولكن $3 \neq 4$

**مثال (6)**

**أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:**

a) $2^{x} = 64$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 0.5$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \left(\frac{64}{27}\right)$

**الحل:**

a) $2^{x} = 64$

$2^{x} = 2^{6}$ حلل 64 إلى عوامله

$x = 6$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{6\}$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{x} = -0.5$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{x} = -\frac{1}{2}$ $\quad -0.5 = -\frac{1}{2}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{1}$

$\therefore\ x = 1$ $\quad$ إذا كان $a^{n} = a^{m}$ فإن، $n = m$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{1\}$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \left(\frac{64}{27}\right)$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \frac{4^{3}}{3^{3}}$ $\quad 4^{3} = 64\ ;3^{3} = 27$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3}$ $\quad \left(\frac{x^{n}}{y^{n}}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^{n}\ ,\ y \neq 0$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ $\quad \left(\frac{x}{y}\right)^{n} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-n}\ ,\ x \neq 0\ ,\ y \neq 0$

$\therefore\ x = -3$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-3\}$

**حاول أن تحل**

**6** حل كلًّا من المعادلات التالية:

a) $3^{x} = 243$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = \frac{1}{128}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{81}{16}$

يمكن أن يكون الأس كثيرة حدود.

تذكر:
إذا كان $ab = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$.

تذكر:
$a \neq 0$ حيث $a^0 = 1$

## مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $3^{x^2-1} = 27$

b $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$

c $6^{2x-8} = 1$

الحل:

a $3^{x^2-1} = 27$

$3^{x^2-1} = 3^3$ حلل 27 إلى عوامله الأولية

$x^2 - 1 = 3$ إذا كان $a^m = a^n$ فإن $m = n$

$x^2 = 4$ تبسيط

$x = 2$ أو $x = -2$ حل المعادلة

∴ مجموعة الحل = {2، −2}

b $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$

$7^{x^2-3x} = \frac{1}{7^2}$ حلل 49 إلى عوامله الأولية

$7^{x^2-3x} = 7^{-2}$ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}\ ,\ x \neq 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ إذا كان $a^m = a^n$ فإن، $m = n$

$(x-1)(x-2) = 0$ حلل

$x - 1 = 0$ أو $x - 2 = 0$

$\therefore x = 1$ أو $x = 2$

مجموعة الحل = {1، 2}

c $6^{2x-8} = 1$

$6^{2x-8} = 6^0$

$2x - 8 = 0$

$x = 4$

مجموعة الحل = {4}

### حاول أن تحل

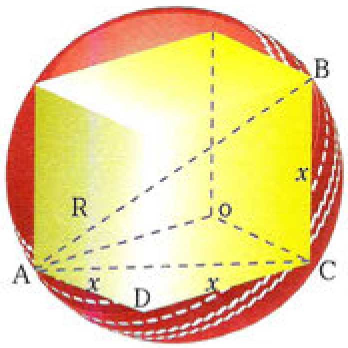
7 حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $5^{x^2-4} = 1$

b $3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}$

c $2^{x^2-4} = 32$

## المرشد لحل المسائل




مكعب طول ضلعه $x$ محاط بكرة كما في الصورة المقابلة.

أوجد نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب.

**كيف نفكّر؟**

**إستراتيجية الحل:**

إيجاد حجم المكعب، إيجاد حجم الكرة، ثم إيجاد نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب.

**الخطوة الأولى: حجم المكعب.**

في البداية علينا إيجاد حجم المكعب بدلالة طول ضلعه $x$.

حجم المكعب $= x^3$

**الخطوة الثانية: حجم الكرة.**

إيجاد نصف قطر الكرة.

$AB$ هو قطر للكرة.

$AB$ هو قطر للمكعب.

$AB$ هو أيضًا وتر المثلث $ABC$ قائم الزاوية $C$ حيث: $AC = g$، $CB = x$.

**a** لإيجاد $AB$ سنبدأ بإيجاد $AC$،

$ACD$ مثلث قائم الزاوية $D$.

$(AC)^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$ نظرية فيثاغورث

$\therefore\ AC = x\sqrt{2}$

**b** لإيجاد $AB$ نستخدم المثلث $ABC$

$ABC$ مثلث قائم الزاوية $C$

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ نظرية فيثاغورث

$(AB)^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$

$\therefore\ AB = x\sqrt{3}$

**c** لإيجاد طول نصف القطر:

$$R = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

**d** إيجاد حجم الكرة:

حجم الكرة:

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}(3.14)\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{4(3.14)(3x^3\sqrt{3})}{(8)(3)}$$

$$\approx 1.57\sqrt{3}\,x^3$$

**الخطوة الثالثة: احسب نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب:**

نوجد $\frac{\text{حجم الكرة}}{\text{حجم المكعب}}$ ،  $\frac{(1.57)\times x^3\sqrt{3}}{x^3} = \frac{2.72}{1}$

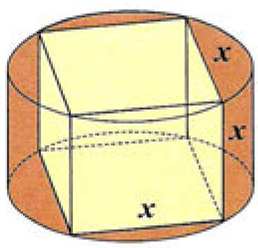
$\therefore$ حجم الكرة: حجم المكعب حوالى

2.72 : 1

**مسألة إضافية**

مكعب طول ضلعه $x$ محاط بأسطوانة كما في الصورة أدناه.

أوجد نسبة حجم الأسطوانة إلى حجم المكعب.



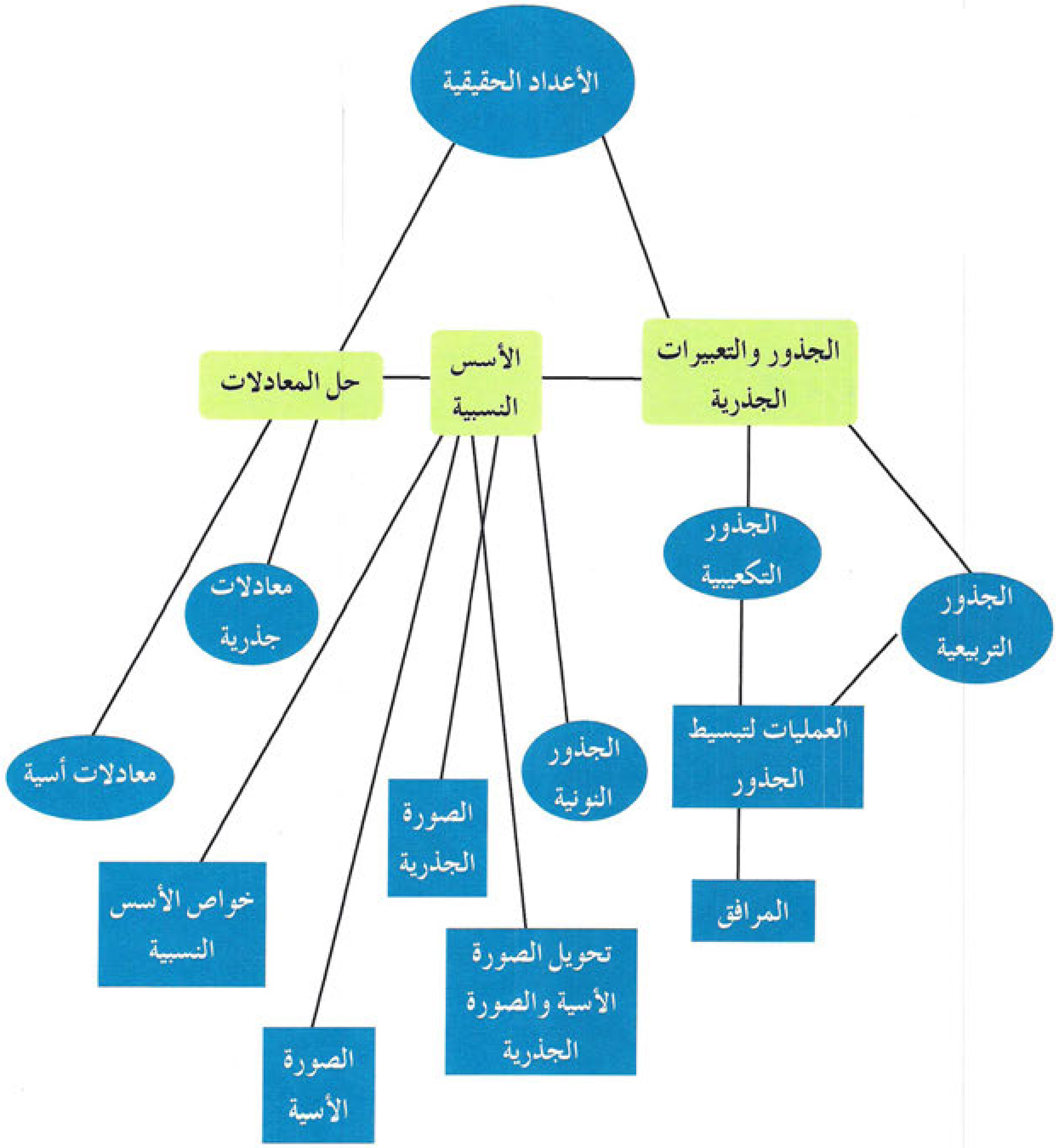

**مساعدة رياضية**

حجم الأسطوانة $= \pi \times r^2 \times h$

حيث $h$ = ارتفاع الأسطوانة.

$r$ = طول نصف القطر للأسطوانة.

# مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



# ملخص

- $\sqrt{x^2} = |x|\,,\ (\sqrt{x})^2 = x$
- $A^2 = x,\ x \geqslant 0 \Longrightarrow A = \pm\sqrt{x}$
- $(\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} (a\cdot b)^n = a^n \, . \, b^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \\ a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad b^{-n} = \frac{1}{b^n}, b \neq 0 \\ (a^m)^n = a^{m\cdot n} \quad \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}, b \neq 0 \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x$
- $\sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
- $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
- $\sqrt[3]{x\cdot y} = \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \neq 0$

- إذا كان $a, b$ عددين نسبيين موجبين فإن:
  $\sqrt{a}$ هو مرافق $\sqrt{a}$
  $a+\sqrt{b}$ هو مرافق $a-\sqrt{b}$
  المجذور ← $\sqrt[n]{x}$ ⟵ دليل الجذر

- إذا كان الجذر النوني لعدد $x$ هو عددًا حقيقيًا، $m$ عددًا صحيحًا، $n$ عددًا طبيعيًا $n > 1$ فإن:

- $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \\ x & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \end{cases}$$

- إذا كان $\sqrt[n]{y}, \sqrt[n]{x}$ عددين حقيقيين فإن:

- $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} \quad y \neq 0$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n.m]{x}$

- المعادلة الجذرية معادلة أس المتغير فيها عدد نسبي أو يتضمن المجذور المتغير.
- إذا كان $m$ عددًا زوجيًا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = |x|$
- إذا كان $m$ عددًا فرديًا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$
- $m, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}, a \notin \{-1, 0, 1\},\ a^m = a^n \Longrightarrow m = n$